MAI 1 – domácí úkol (ze cvičení) 12 (dobrovolný) – určitý integrál
Příklady k promyšlení (a pište otázky), a pokud chcete, tak si něco vyberte a sepište jako domácí úkol 12.

Výpočet *R*- integrálu integrací per partes nebo pomocí substituce:

$$\int_{-1}^{1} \arcsin^2(x)\,dx\ ; \qquad \int_{2}^{3} \frac{1}{x^2}.\ln\frac{1}{x}\,dx\ ; \qquad \int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx\ ; \qquad \int_{0}^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx \text{ (substituce } tg(x)=t\text{)}$$

A několik příkladů aplikace určitého integrálu:

1. a) Spočítejte obsah omezené rovinné oblasti ω, je-li ω ohraničená grafy funkcí $y=x^2$ a $y=2-x$ a osou x.
   b) Spočítejte obsah omezené rovinné oblasti ω, je-li ω ohraničená grafy funkcí $y=x^2$, $y=x\sin x$ a přímkou $x=\frac{\pi}{2}$.

2. a) Spočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ω kolem osy x, kde
   $$\omega=\left\{[x,y];-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\cos x\right\}.$$
   b) Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací omezené rovinné oblasti ω kolem osy x, kde oblast ω je ohraničená grafy funkcí $y=xe^x$ a $y=x$ a přímkou $x=1$.

3. a) Určete délku grafu funkce $f(x)=\frac{x^2}{2}$, $0\le x\le a$.
   b) Určete délku grafu funkce $f(x)=\ln(\cos x)$, $0\le x\le\frac{\pi}{6}$.
   („tahák“ : $\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$, $x\in R$);
   c) Určete délku grafu funkce $f(x)=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$.

A můžete zkusit ještě další užití věty o substituci a vlastností *R*- integrálu:

Ukažte, že platí :

1. Je-li $f\in R(-a,a)$, $a>0$, f je funkce lichá, pak $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.
2. Je-li $f\in R(-a,a)$, $a>0$, f je funkce sudá, pak $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.
3. Je-li f spojitá a sudá v intervalu $[-a,a]$ ($a>0$), pak primitivní funkce je v intervalu $(-a,a)$ lichá.
4. Je-li f spojitá a sudá v intervalu $[-a,a]$ ($a>0$), pak $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx=\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.
5. Bez výpočtu integrálu ukažte, že
   a) $\int_{-1}^{2}(e^x-e^{-x})\,dx>0$; b) $\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln x}{x}\,dx=0$, ($a>0$).